

Quadratische Funktionen

Bildungsplan 2016 · Fassung V3.0

Bearbeitungszeit: 45 min

Hilfsmittel: Taschenrechner, Formelsammlung

Gesamt: 26 Punkte

NOTENSCHLÜSSEL · LINEARER VORSCHLAG

NOTE	1	2	3	4	5	6
PUNKTE	23,5–26	19,5–23	16–19	12–15,5	6,5–11,5	0–6

Aufgabe 1

7 PUNKTE a) 1, b) 2, c) 3, d) 1

AFB I (Reproduktion) · Operator angeben

Gegeben ist die quadratische Funktion $f(x) = 2 \cdot (x - 3)^2 - 4$ in Scheitelform.

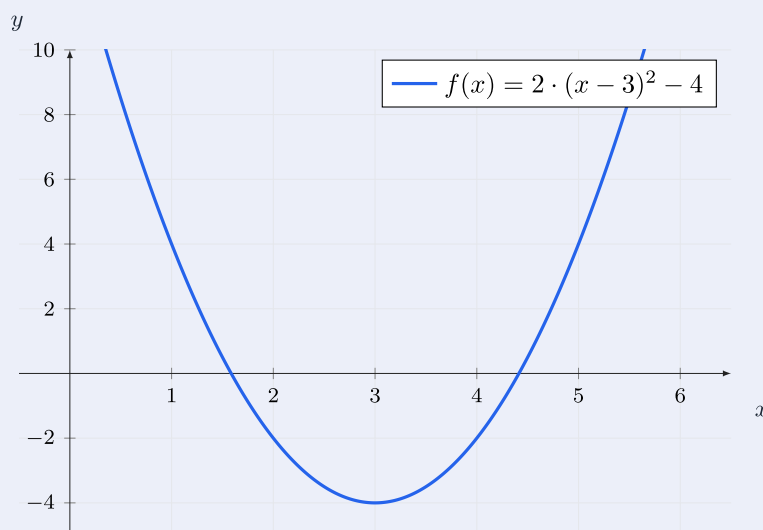


Abb. 1

- Gib den Scheitelpunkt des Graphen von f an.
- Gib an, ob der Graph nach oben oder nach unten geöffnet ist, und begründe dies mit dem Vorzeichen von a .
- Gib an, wie der Graph von f aus der Normalparabel $y = x^2$ durch die Parameter a , d und e hervorgeht.
- Gib den kleinsten Funktionswert von f an und nenne die zugehörige Stelle x .

BILDUNGSPLAN

(2) Eigenschaften von Parabeln angeben

↳ (4) die Wirkung der Parameter a , d , e auf den Graphen der Funktion f mit $f(x) = a \cdot (x - d)^2 + e$ abbildungsgeometrisch als Streckung, Spiegelung, Verschiebung deuten

Aufgabe 2

6 PUNKTE a) 1, b) 3, c) 2

AFB I (Reproduktion) · Operator berechnen

Der Graph einer quadratischen Funktion g hat den Scheitelpunkt $S(-1|2)$ und öffnet sich nach unten mit dem Streckfaktor $a=-1$.

- Stelle den Funktionsterm von g in Scheitelform dar.
- Berechne eine Wertetabelle für g mit den x -Werten $-3, -2, -1, 0, 1$ und skizziere den Graphen.
- Gib die Eigenschaften des Graphen von g hinsichtlich Symmetrieachse und Öffnungsrichtung an.

BILDUNGSPLAN

(3) den Graphen einer quadratischen Funktion mithilfe von Wertetabellen zeichnen oder ausgehend von der Lage des Scheitels skizzieren

↳ (2) Eigenschaften von Parabeln angeben

Aufgabe 3

7 PUNKTE a) 3, b) 2, c) 2

AFB II (Reorganisation) · Operator bestimmen

Ein Sportgeschäft in einer Freiburger Fußgängerzone lässt ein rechteckiges Werbebanner über dem Eingang anbringen. Die Höhe des Banners über dem Boden lässt sich näherungsweise durch eine quadratische Funktion beschreiben, deren Graph die x -Achse (den Boden) bei $x=0$ m und $x=4$ m schneidet — dort sind die beiden Befestigungspunkte des Banners. Der höchste Punkt des gespannten Stoffes liegt in der Mitte zwischen den Befestigungspunkten in 3 m Höhe.

- Bestimme den Funktionsterm der Bannerkurve in Linearfaktordarstellung.
- Skizziere den Graphen der Bannerkurve mithilfe einer Wertetabelle und deute den Verlauf im Sachzusammenhang.
- Ein Kunde behauptet, das Banner hänge bei $x=1$ m tiefer als 2 m über dem Boden. Überprüfe diese Behauptung rechnerisch und erkläre das Ergebnis im Sachzusammenhang.

BILDUNGSPLAN

(6) den Funktionsterm einer quadratischen Funktion mithilfe von Nullstellen in Linearfaktordarstellung angeben

↳ (3) den Graphen einer quadratischen Funktion mithilfe von Wertetabellen zeichnen oder ausgehend von der Lage des Scheitels skizzieren

Aufgabe 4

6 PUNKTE a) 3, b) 3

AFB II (Reorganisation) · Operator beurteilen

Beim Training auf dem Sportplatz eines Gymnasiums in Reutlingen lässt Jana einen Medizinball aus unterschiedlichen Höhen fallen und misst mit einer Stoppuhr, wie tief er nach bestimmten Zeiten gefallen ist. Sie erhält folgende Messwerte für die Fallstrecke s (in Metern) nach der Zeit t (in Sekunden):

t in s	0,5	1,0	1,5	2,0
s in m	1,25	5,0	11,25	20,0

Jana ist unsicher, ob sich die Fallstrecke linear oder quadratisch in Abhängigkeit von der Zeit verändert.

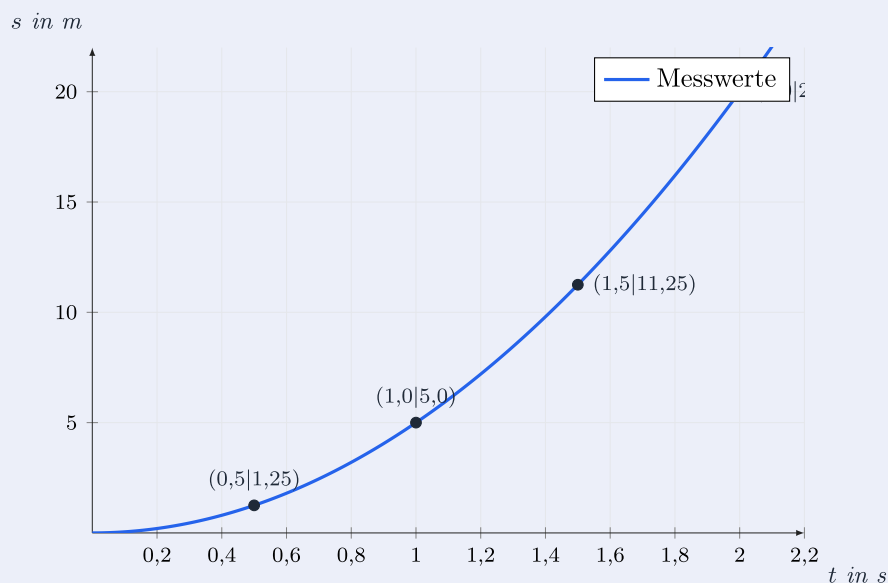


Abb. 4

- a) Beurteile anhand der Messwerte, ob ein linearer oder ein quadratischer Zusammenhang zwischen t und s vorliegt, und begründe deine Entscheidung.
- b) Bestimme mit dem passenden Modell aus a) die Fallstrecke, die der Ball nach 3 Sekunden zurückgelegt hat, und beurteile, ob dieser Wert für einen realen Fall aus großer Höhe noch plausibel ist.

BILDUNGSPLAN

(1) quadratische Zusammenhänge durch Tabellen und Gleichungen beschreiben und grafisch darstellen

↳ (5) eine quadratische Funktion f in ihrer Normalform $f(x) = ax^2 + bx + c$ mithilfe funktionaler oder algebraischer Überlegungen in die Scheitelform $f(x) = a \cdot (x - d)^2 + e$ überführen

↳ (6) den Funktionsterm einer quadratischen Funktion mithilfe von Nullstellen in Linearfaktordarstellung angeben

Quadratische Funktionen

LEHRER-EXEMPLAR · zur Korrektur

Aufgabe 1

7 Punkte

Scheitelform direkt ablesen liefert Scheitel, Öffnungsrichtung, Streckfaktor und Extremwert.

Punkte: siehe Teilaufgaben

- a) Scheitelpunkt direkt aus der Scheitelform ablesen: $S(3|-4)$.
Punkte: 1 (Ergebnis)
- b) $a=2>0$, also Öffnung nach oben.
Punkte: 1+1 (Ergebnis · Begründung)
- c) Streckung mit Faktor 2 (schmäler als Normalparabel), Verschiebung um 3 nach rechts ($d=3$) und um 4 nach unten ($e=-4$).
Punkte: 1+1+1 (Streckung · Verschiebung rechts · Verschiebung unten)
- d) Da die Parabel nach oben geöffnet ist, liegt das Minimum im Scheitel: kleinster Funktionswert -4 bei $x=3$.
Punkte: 1 (Ergebnis)

Aufgabe 2

6 Punkte

Wertetabelle aus dem Term berechnen, Punkte einzeichnen, Parabel durch den Scheitel skizzieren.

Punkte: siehe Teilaufgaben

- a) $g(x) = -1 \cdot (x - (-1))^2 + 2 = -(x + 1)^2 + 2$.
Punkte: 1 (Term)
- b) $g(-3) = -(-2)^2 + 2 = -2$, $g(-2) = -(-1)^2 + 2 = 1$, $g(-1)=2$, $g(0) = -(1)^2 + 2 = 1$, $g(1) = -(2)^2 + 2 = -2$. Nach unten geöffnete Parabel durch diese Punkte mit Scheitel $S(-1/2)$.
Punkte: 2+1 (Werte · Skizze)
- c) Symmetrieachse ist die Gerade $x=-1$ (senkrecht durch den Scheitel), Öffnung nach unten, da $a=-1<0$.
Punkte: 1+1 (Symmetrieachse · Öffnungsrichtung)

Aufgabe 3

7 Punkte

Nullstellen liefern die Linearfaktoren, Scheitelhöhe legt den Streckfaktor a fest; Wertetabelle stützt die Skizze und die Deutung im Sachkontext.

Punkte: siehe Teilaufgaben

- a) Nullstellen bei $x=0$ und $x=4$: $f(x)=a \cdot x \cdot (x-4)$. Scheitel bei $x=2$: $f(2) = a \cdot 2 \cdot (-2) = -4a = 3 \Rightarrow a = -\frac{3}{4}$. Term: $f(x) = -\frac{3}{4}x(x - 4)$.
Punkte: 1+1+1 (Nullstellenansatz · a bestimmen · Term)
- b) Wertetabelle z.B. $f(0)=0$, $f(1)=2,25$, $f(2)=3$, $f(3)=2,25$, $f(4)=0$. Der Graph steigt vom Boden aus symmetrisch bis zum höchsten Punkt bei $x=2$ m (3 m Höhe) und fällt dann wieder zum zweiten Befestigungspunkt ab — das Banner hängt bogenförmig zwischen den beiden Punkten durch.
Punkte: 1+1 (Wertetabelle/Skizze · Deutung im Kontext)
- c) $f(1) = -\frac{3}{4} \cdot 1 \cdot (1 - 4) = -\frac{3}{4} \cdot (-3) = 2,25$. Da $2,25 > 2$, ist die Behauptung falsch — das Banner hängt bei $x=1$ m höher als 2 m, weil der Kurvenverlauf zwischen 0 und dem Scheitel bereits deutlich ansteigt.
Punkte: 1+1 (Rechnung · Erklärung)

Aufgabe 4

6 Punkte

Entscheidung zwischen linearem und quadratischem Modell über Quotiententest, anschließende Prognose und kritische Reflexion der Modellgrenzen (Luftwiderstand).

Punkte: siehe Teilaufgaben

- a) Bei linearem Zusammenhang müssten die Quotienten $\frac{s}{t}$ konstant sein: $\frac{1,25}{0,5} = 2,5$, $\frac{5,0}{1,0} = 5,0$ – nicht konstant, also nicht linear. Quotienten $\frac{s}{t^2}$: $\frac{1,25}{0,25} = 5$, $\frac{5,0}{1,0} = 5$, $\frac{11,25}{2,25} = 5$, $\frac{20,0}{4,0} = 5$ – konstant, also quadratischer Zusammenhang $s = 5t^2$.

Punkte: 1+1+1 (Quotienten linear prüfen · Quotienten quadratisch prüfen ·

Schlussfolgerung)

- b) $s(3) = 5 \cdot 3^2 = 45$ m. Beurteilung: Das Modell $s = 5t^2$ vernachlässigt den Luftwiderstand; bei realen Fällen aus großer Höhe wirkt die Luftreibung zunehmend bremsend, sodass die tatsächliche Fallstrecke geringer ausfällt als die Modellrechnung – das Modell gilt nur näherungsweise und für begrenzte Fallzeiten/-höhen plausibel.

Punkte: 1+2 (Berechnung · kritische Beurteilung der Modellgrenzen)